UNIVERSITÉ DE PARIS VII

LÉWY Serge, Ingénieur des Télécommunications
Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (O.N.E.R.A.)
29, Avenue de la Division Leclerc - 92320 CHATILLON France

MESURE DE LA TEMPÉRATURE DE ROTATION DE L'AZOTE EN ÉCOULEMENT HYPERSONIQUE PAR UNE SONDE À FAISCEAU D'ÉLECTRONS

Extrait du Journal de Physique, Tome 33, n° 11/12 (novembre-décembre 1972), p. 53-66.

N° d'enregistrement au C.N.R.S. : A.O. 7164

Article principal de la **THÈSE DE DOCTORAT ÈS SCIENCES** soutenue le 16 juin 1972.

Sujet : SONDAGE DE GAZ RARÉFIÉS PAR FAISCEAU D'ÉLECTRONS APPLIQUÉ AUX ÉCOULEMENTS AÉRODYNAMIQUES

Jury : MM. E. SCHATZMAN — Président
R. LENNUIER, M. CLOUPEAU, J. TAILLET — Examinateurs

UNIVERSITÉ DE PARIS VII

LÉWY Serge, Ingénieur des Télécommunications
Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (O.N.E.R.A.)
29, Avenue de la Division Leclerc - 92320 CHATILLON France

MESURE DE LA TEMPÉRATURE DE ROTATION DE L'AZOTE EN ÉCOULEMENT HYPERSONIQUE PAR UNE SONDE À FAISCEAU D'ÉLECTRONS

Extrait du Journal de Physique, Tome 33, nº 11/12 (novembre-décembre 1972), p. 53-66.

Nº d'enregistrement au C.N.R.S. : A.O. 7164

Article principal de la **THÈSE DE DOCTORAT ÈS SCIENCES** soutenue le 16 juin 1972.

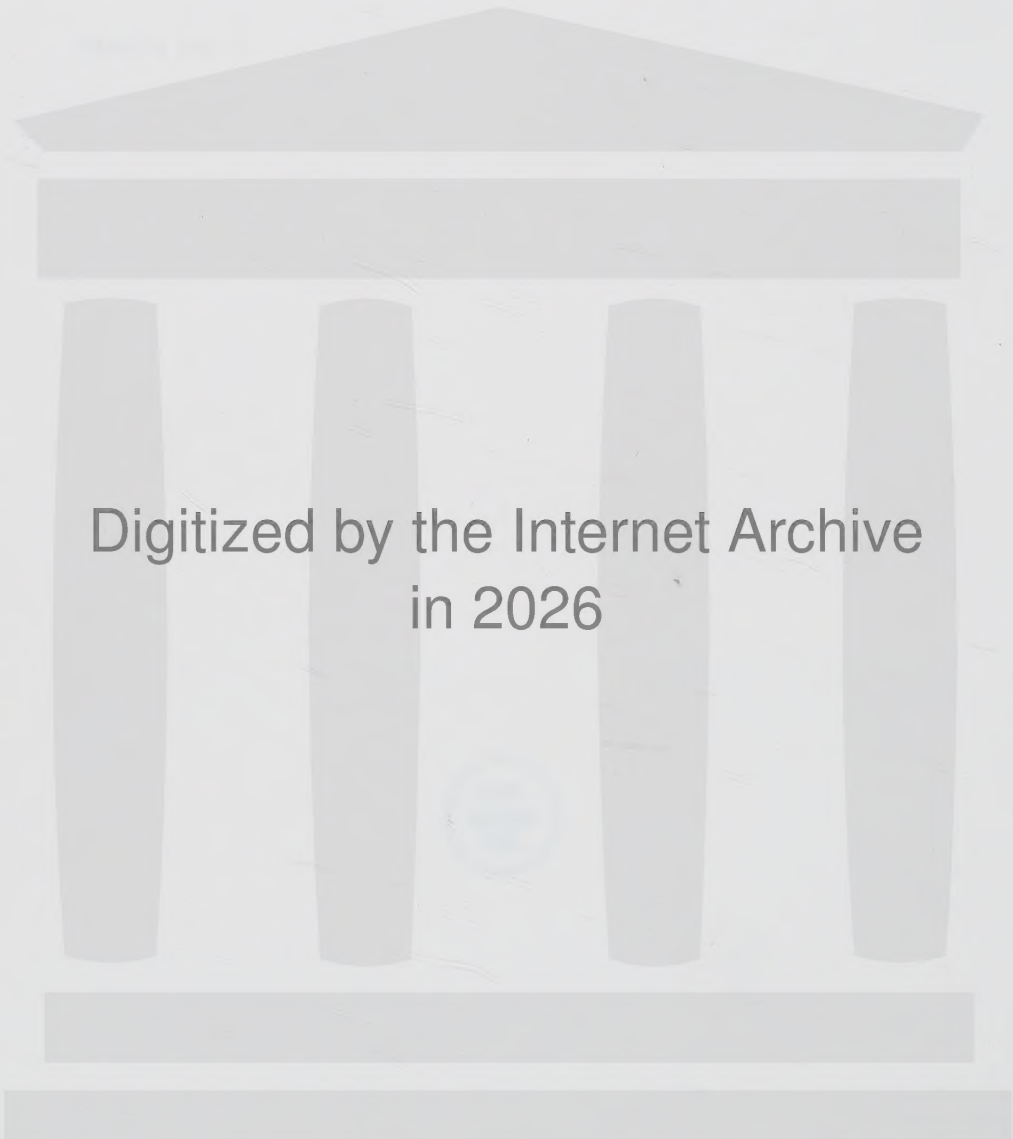
Sujet : SONDAGE DE GAZ RARÉFIÉS PAR FAISCEAU D'ÉLECTRONS APPLIQUÉ AUX ÉCOULEMENTS AÉRODYNAMIQUES

Jury : MM. E. SCHATZMAN — Président
R. LENNUIER, M. CLOUPEAU, J. TAILLET — Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A la mémoire de ma grand'mère

A mes parents



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534912_0005

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particulièrement M. le Professeur SCHATZMAN qui m'a fait l'honneur de présider le jury et M. le Professeur LENNUIER qui a bien voulu en être membre.

M. CLOUPEAU et son équipe du Laboratoire d'Aérothermique du C.N.R.S. n'ont jamais hésité à nous faire partager l'expérience qu'ils avaient acquise dans le domaine du sondage par faisceau d'électrons. Qu'ils soient assurés de ma plus profonde gratitude, tout particulièrement M. CLOUPEAU qui a accepté de faire partie de mon jury.

M. LEGENDRE a bien voulu me recevoir à l'O.N.E.R.A.. Je lui suis en outre reconnaissant de m'avoir fait l'honneur de présenter un Compte Rendu à l'Académie des Sciences de Paris.

M. TAILLET a témoigné un intérêt constant pour cette étude et l'a dirigée activement par de précieux conseils. Je l'en remercie très sincèrement et j'ai grand plaisir qu'il fasse partie de mon jury.

Je suis redevable à Messieurs MOREAU et DELATTRE de m'avoir suggéré ce sujet de thèse qui m'a permis d'approfondir mes connaissances dans de nombreux domaines de la physique et que j'ai trouvé passionnant et très varié. Je les remercie également de m'avoir fait confiance et de m'avoir choisi pour mener à bien cette étude.

Je désire insister sur le rôle capital qu'a joué M. JUILLERAT dans l'aboutissement de ce travail. Il l'a conseillé pas à pas et ses larges connaissances théoriques, sa haute compétence en l'art de l'ingénieur de recherches furent pour moi une aide précieuse dont je lui suis reconnaissant.

Ce fut pour moi, dès le premier jour, une grande joie d'être accueilli dans le groupe de M. DUBOIS. Qu'il veuille bien croire à ma chaleureuse reconnaissance pour la cordialité et l'amitié dont il m'a toujours honoré, pour l'intérêt constant qu'il a porté à mon travail et pour les diverses études qu'il a effectuées à mon intention.

Je ne peux hélas remercier nominalement tous mes amis de l'O.N.E.R.A. qui ont participé à ce problème à divers titres, que ce soit à la Direction de l'Aérodynamique, où j'ai effectué mes essais, ou à la Direction de Physique Générale : dans celle-ci, le Bureau d'Etudes a dessiné avec maîtrise l'ensemble de la réalisation expérimentale qui a souvent posé des problèmes ardus, la Division Optique m'a apporté sa grande expérience et son précieux concours pour des mises au point délicates d'appareillages et la Division Electronique et Mesures, à laquelle j'appartiens, m'a aidé à maintes reprises dans mes expériences.

RÉSUMÉ DE LA THÈSE

Le sondage par faisceau d'électrons est une méthode moderne d'analyse de gaz raréfiés. Il consiste à faire traverser le milieu étudié par un fin pinceau d'électrons à haute énergie dont les caractéristiques typiques sont les suivantes : diamètre 1 mm, intensité 1 mA, tension accélératrice 30 kV. Quelques molécules sont ainsi excitées et il en résulte une émission lumineuse. L'étude des caractéristiques de cette émission permet de déduire de nombreux paramètres du gaz dans son état initial. Une analyse soignée des processus d'excitation est toutefois indispensable pour l'obtention de résultats précis. Cette technique constitue actuellement un outil incomparable pour la connaissance des jets hypersoniques. Elle donne en effet des grandeurs statiques par rapport à l'écoulement avec une excellente résolution spatiale [*a*].

Les visualisations fournissent le champ de masses volumiques dans une fine tranche d'écoulement. Elles peuvent être réalisées en déplaçant le faisceau d'électrons : le montage mis au point comprend en particulier un joint glissant étanche au vide, permettant la translation du faisceau à vitesse constante sur une grande distance. Mais la postluminescence dans l'azote pur conduit à des résultats semblables et le faisceau reste alors fixe. Dans les deux cas, des clichés d'excellente qualité sont obtenus avec un simple appareil photographique [*b, c*].

Pour la mesure fine des masses volumiques, l'utilisation d'un système optique comprenant un photomultiplicateur est préférable. Le domaine exploré, entre 10^{-4} et 10^{-3} kg/m^3, est relativement élévé pour cette technique de sondage. Les recherches ont donc porté principalement sur l'étude des effets annexes : collisions de desexcitation non radiatives, diffusion du faisceau d'électrons, influence des électrons secondaires. Elles ont conduit à des résultats présentant une précision satisfaisante [*c, d*].

La température se calcule à partir de la mesure des intensités relatives des bandes ou raies excitées par le faisceau d'électrons. Les essais sur la température de vibration ont permis de s'assurer qu'il est aisé d'étudier les phénomènes de figeage dans l'azote [*e*]. Pour la détermination de la température de rotation, il faut apporter un soin particulier à la chaîne de mesure afin que le rapport signal sur bruit soit suffisamment bon. Un modèle de calcul original a été mis au point : il tient compte de l'influence des électrons secondaires pour éliminer au mieux les erreurs systématiques. Des études théoriques plus approfondies ont montré que les différents modèles conduisent à des écarts en température pratiquement indépendants de celle-ci. Une méthode simple et rapide a ainsi pu être dégagée : elle permet la détermination de la température, même sans programmation sur ordinateur [*f, g*].

Ces diverses possibilités ont été appliquées en particulier à l'étude de couches limites laminaires épaisses en sortie de tuyères hypersoniques. Deux conclusions peuvent être dégagées de ces essais. D'un point de vue aérodynamique, ils ont permis de confirmer les hypothèses de calcul du profil de ces tuyères. D'un point de vue physique, ils ont prouvé que la méthode proposée a été rendue opérationnelle sur toute la gamme de valeurs concernée par les problèmes d'aérodynamique hypersonique à basse densité, simulant les conditions de pression à des altitudes comprises entre 50 et 80 km [*b, i*].

BIBLIOGRAPHIE DU RÉSUMÉ, RELATIVE À L'ÉTUDE MENÉE À L'O.N.E.R.A.

[*a*] LÉWY S. – *Sondages de gaz raréfiés par un faisceau d'électrons.* Télécom (Revue des anciens élèves de l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications), nº 22,(décembre 1969), p. 15-19.

[*b*] LÉWY S. – *Visualisations d'écoulements en soufflerie à l'aide d'un faisceau d'électrons.* Rech. Aérosp., nº 1970-3 (mai-juin 1970), p. 155-166. T.P. O.N.E.R.A. nº 856 (1970).

[*c*] LÉWY S. – *Utilisation du sondage par faisceau d'électrons en soufflerie à gaz raréfié. Présentation des résultats : visualisation d'écoulements et mesure de masses volumiques.* Discussion Technique O.N.E.R.A. du 17 décembre 1970.

[*d*] LÉWY S. – *Density measurement in aerodynamic flows by an electron beam probe.* 4th International Congress on Instrumentation in Aerospace Simulation Facilities. ICIASF'71 Record-IEEE Publication 71-C-33 AES (21-23 June 1971), p. 125-135. T.P. O.N.E.R.A. nº 1018 (1971).

[*e*] LÉWY S. – *Mesure de températures par la sonde à faisceau d'électrons.* Colloques d'Evian de la Société Française de Physique (25-29 mai 1971). Le Journal de Physique. Tome 32, Colloque C5, supplément au nº 10, tome b (octobre 1971), p. C5b 48-53. - T.P. O.N.E.R.A. nº 960 (1971).

[*f*] LÉWY S. – *Mesure de la température de rotation par la sonde à faisceau électronique avec prise en compte des électrons secondaires.* C.R. Ac. Sc. de Paris, tome 274-B (28 février 1972), p. 581-583. T.P. O.N.E.R.A. nº 1069 (1972).

[*g*] LÉWY S. – *Mesure de la température de rotation de l'azote en écoulement hypersonique par une sonde à faisceau d'électrons.* Le Journal de Physique, tome 33, nº 11/12 (novembre-décembre 1972), p. 53-66.

[*h*] LÉWY S. – *Density and temperature measurement in laminar boundary layer and free jet of hypersonic nozzles by electron beam probe.* Eighth International Symposium on Rarefied Gas Dynamics. Stanford University, Stanford (Calif.). Book of Abstracts, volume I. AFOSR-TR-72-1276 (10-14 July 1972), p. 255-260. T.P. O.N.E.R.A. nº 1131 (1972).

[*i*] LÉWY S. – *Sondage de gaz raréfiés par faisceau d'électrons appliqué à l'étude d'écoulements aérodynamiques.* Thèse de Doctorat ès Sciences. Université de Paris VII. Nº d'enregistrement au C.N.R.S. : A.O. 7164 (16 juin 1972). Publication O.N.E.R.A. nº 146 (1972).

Le texte qui suit est la référence [*g*] ci-dessus et constitue l'Article Principal de la Thèse.

Classification
Physics Abstracts
13. 31

MESURE DE LA TEMPÉRATURE DE ROTATION DE L'AZOTE EN ÉCOULEMENT HYPERSONIQUE PAR UNE SONDE A FAISCEAU D'ÉLECTRONS (*)

S. LEWY

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA)

(*Reçu le 15 février 1972, révisé le 14 avril 1972*)

Résumé. — La température de rotation peut être calculée à partir des intensités relatives de raies d'un spectre de rotation. Quelques-unes des molécules du gaz sont excitées par un fin pinceau d'électrons ; un dispositif optique comprenant un spectromètre à réseau fournit, en tout point d'un champ aérodynamique, l'enregistrement de ce spectre. Cette technique est appliquée à la mesure de la température d'un gaz sur une petite soufflerie hypersonique continue équipée de cette sonde à faisceau d'électrons.

Les études ont porté sur la définition d'un modèle simple de calcul de cette température éliminant au mieux les erreurs systématiques. Ce modèle est comparé à ceux utilisant un programme de calcul plus complexe. Les températures obtenues sont en bon accord avec les valeurs réelles si les transitions d'excitation $\Delta N = 1$ et 3 sont prises en compte ; une méthode de calcul simplifiée conduit très rapidement à la température cherchée sans nécessiter de programmation sur ordinateur.

Abstract. — The rotational temperature can be computed from the relative intensities of rotational spectrum lines. A few molecules are excited by an electron beam ; an optical device including a grating spectrometer provides, at any point of an aerodynamic field, the recording of this spectrum. This technique has been applied to gas temperature measurement in a small continuous hypersonic wind tunnel equipped with this electron beam probe.

These studies were concerned with the definition of a simple model for calculating this temperature, eliminating as best as possible the systematic errors. This model is compared with those making use of a more complex computation program. The temperatures obtained compare well with the real values if the $\Delta N = 1$ and 3 excitation transitions are taken into account ; a simplified computation method leads very quickly to the temperature without any need for computer programming.

Introduction. — Lorsqu'un fin pinceau d'électrons à haute énergie traverse un gaz raréfié, l'interaction est très faible. Cependant, un petit nombre de particules du gaz est porté de l'état initial $\mathcal{E}$ vers un état excité $\mathcal{E}'$; il peut en résulter une émission lumineuse par désexcitation de $\mathcal{E}'$ vers l'état final $\mathcal{E}''$. L'étude de cette émission permet de déterminer de nombreuses caractéristiques du milieu exploré.

Après les premiers articles, parus principalement en 1958 [1], [2], les publications fondamentales de Muntz en 1962 [3] et 1963 [4] précisent le modèle d'excitation et d'émission et indiquent l'ensemble des bases théoriques nécessaires à l'utilisation de cette méthode de sondage. Celle-ci s'est rapidement développée et Muntz a publié un important document de synthèse en 1968 [5]. Mais la théorie relativement simple de Muntz [3], où seuls sont considérés les électrons primaires du faisceau, présente certaines limitations. Des calculs plus élaborés sont indispensables pour que les mesures fournissent une connaissance plus précise de la réalité.

L'ONERA a décidé d'étudier cette technique de sondage de gaz raréfiés par faisceau d'électrons au début de 1968. Les recherches théoriques et expérimentales ont conduit à une réalisation achevée un an plus tard et les essais en soufflerie ont pu commencer au milieu de 1969. Des visualisations qualitatives et même semi-quantitatives du champ de masses volumiques dans une fine tranche d'écoulement ont d'abord été obtenues [6], [7]. Les masses volumiques explorées atteignaient 10^{-3} kg/m^3, de sorte que la prise en compte de phénomènes secondaires a été nécessaire pour leur mesure précise [8].

Les mesures de températures ont été entreprises au début de l'année 1971 : la température est calculée à partir de l'intensité relative des différentes raies émises. Après les premiers étalonnages [9], les recherches ont

(*) Ce travail constitue l'article principal d'un Doctorat ès Sciences à l'Université de Paris 7 (soutenance le 16 juin 1972, n° d'enregistrement au CNRS : AO 7164).

porté sur la mise au point d'un modèle de calcul incluant le rôle des électrons secondaires. Il a pour but de diminuer les erreurs systématiques, sans toutefois devenir trop compliqué. Ce sont ces études qui sont présentées. Après un exposé des principes qui ont guidé la réalisation expérimentale, les modèles habituels de calcul de la température de rotation sont rappelés, ainsi que les simplifications suggérées par l'auteur. Enfin, des modèles plus compliqués sont étudiés et une méthode de calcul originale et particulièrement simple est exposée.

1. **Principe de la réalisation expérimentale.** — 1.1 Caractéristiques du faisceau d'électrons. — Le faisceau d'électrons est caractérisé par :

— sa section s ;

— la haute tension u, c'est-à-dire l'énergie d'un électron $W = q.u$, où q est la charge de l'électron ;

— l'intensité i, c'est-à-dire le nombre d'électrons émis par unité de temps i/q.

Le choix de ces caractéristiques est important, en particulier pour l'étude de masses volumiques ρ relativement élevées, de l'ordre de 10^{-3} kg/m^3. C'est pourquoi il semble bon de commencer par réunir les quelques données nécessaires à ce choix. En effet, les mesures dans un écoulement impliquent que le faisceau traverse quelques dizaines de cm de gaz, sans que ses caractéristiques soient altérées : les électrons doivent donc interagir faiblement avec la matière.

La figure 1 montre la section efficace σ_i d'ionisation de N_2 en N_2^+ en fonction de l'énergie W des électrons incidents [10]. Vers les énergies élevées, l'approximation de Born est valable et cette section efficace décroît proportionnellement à $\mathrm{Log}\,(W/W_0)/W$, où W_0 est une constante de même unité que W [11] : ainsi, le produit $\sigma.W$ est fonction linéaire de Log W. Ceci permet d'extrapoler vers les hautes énergies, en pointillés

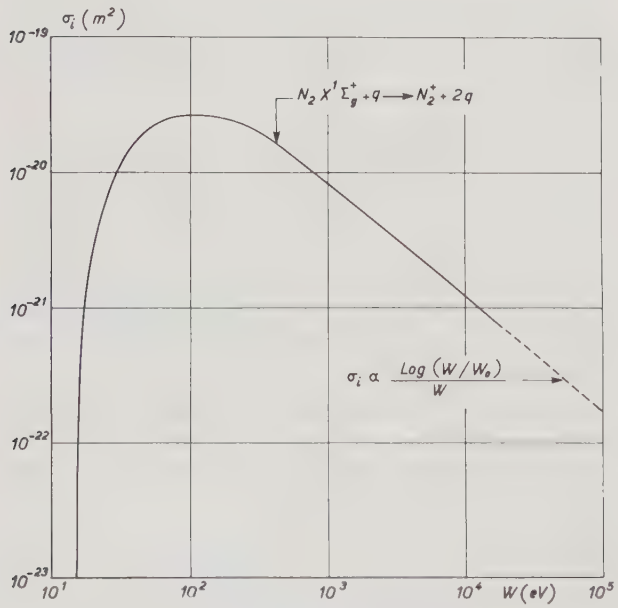


Fig. 1. — Section efficace d'ionisation de l'azote.

sur la figure 1, les courbes trouvées dans les différentes références.

Soit une section efficace totale de collision σ_t avec des particules dont la densité numérique (nombre par unité de volume) est :

$$n = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}} \cdot \rho = \frac{1}{k} \cdot \frac{P}{T}$$

avec $\mathcal{N}$ nombre d'Avogadro, $\mathcal{M}$ masse molaire, k constante de Boltzmann, P pression partielle du composant considéré et T température absolue. Le libre parcours moyen des électrons vaut : $\delta = 1/(\sigma_t.n)$; seule la fraction 1/e des électrons n'a pas subi de collision après le trajet δ. Par exemple dans l'azote, à $W = 30$ keV et si $\sigma_t \simeq \sigma_i = 5 \times 10^{-22}$ m^2, $\rho = 10^{-3}$ kg/m^3 ou $n = 2 \times 10^{22}$ m^{-3} : $\delta_i = 0{,}1$ m.

A chaque collision, l'électron incident peut être légèrement dévié d'un angle α. Les sections efficaces différentielles σ_α sont liées aux précédentes par $\sigma = 2\pi \int_0^\pi \sigma_\alpha . \sin\alpha . d\alpha$. La figure 2 montre les valeurs relatives aux collisions élastiques et inélastiques dans l'azote atomique en fonction de $\alpha.\sqrt{W}$, où W reste cependant dans le domaine de validité de l'approximation de Born [11], [12]. Ces courbes s'appliquent au cas de l'azote moléculaire dans l'hypothèse où chaque molécule serait constituée de deux atomes séparés : il faut donc simplement doubler la densité numérique.

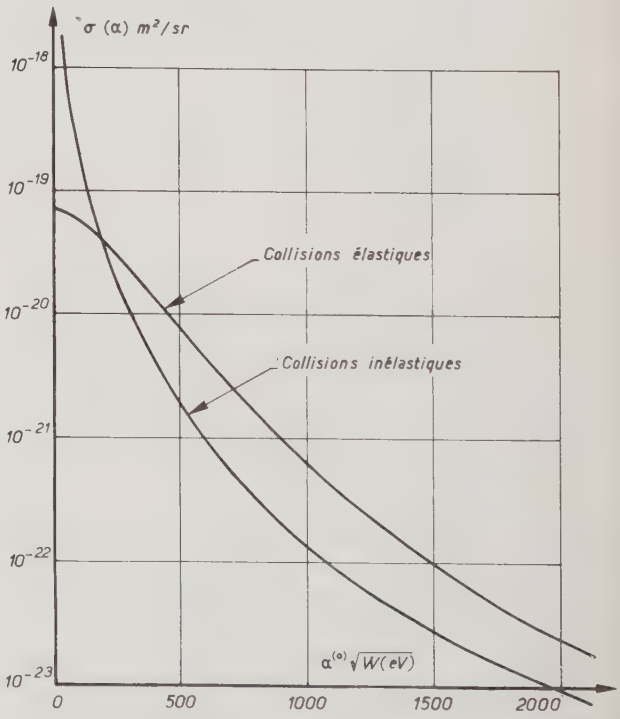


Fig. 2. — Diffusion des électrons dans l'azote atomique.

Un électron d'énergie supérieure à 1 keV perd en moyenne 40 eV par collision ionisante dans l'air [13]. Par conséquent, un électron d'énergie suffisante est peu perturbé par une collision. Il peut donc en subir

un grand nombre et parcourt finalement dans le gaz une longueur Δ très supérieure à δ. Naturellement, après chaque collision, l'électron a perdu un peu de son énergie, sa section efficace de collision croît, son libre parcours moyen diminue et la probabilité de déviation d'un angle α important augmente.

La figure 3 fournit le parcours Δ des électrons dans l'azote moléculaire ou dans l'air : comme pour δ, c'est le produit $\rho.\Delta$ ou $n.\Delta$ qui est fonction de l'énergie initiale W [14] ; il est porté $n.\Delta$ et $P.\Delta$ à $T = 273$ °K. La courbe vérifie bien la relation [15] :

$$n.\Delta = 10^{21} \times W^{7/4} \text{ avec } W \text{ en keV et } n.\Delta \text{ en m}^{-2} .$$

Le rapport $\Delta/\delta_i = (n.\Delta)/(n.\delta_i) = \sigma_i(n.\Delta)$ est également indiqué. Par exemple, pour $W = 30$ keV : $n.\Delta = 4 \times 10^{23}$ m^{-2} et $\Delta/\delta_i = 200$.

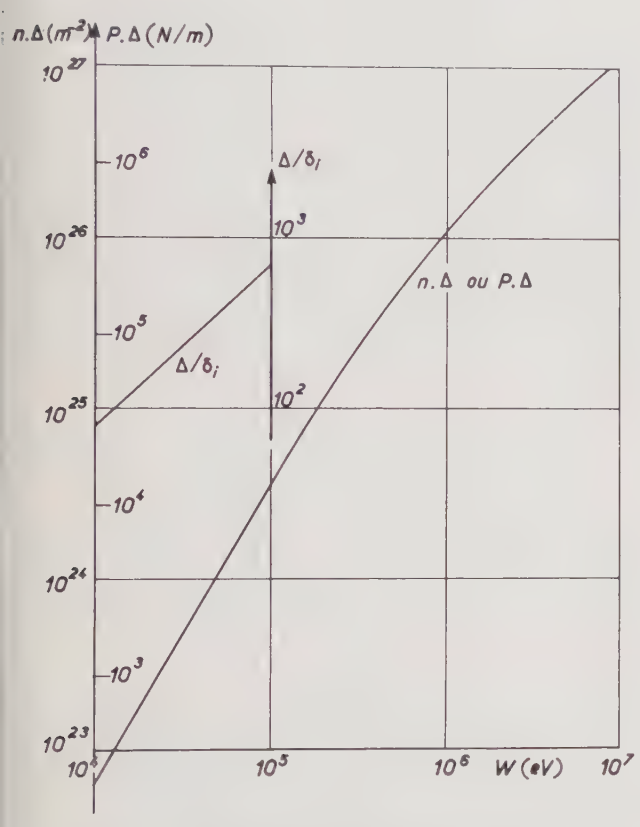


Fig. 3. — Profondeur de pénétration des électrons dans l'air ou l'azote.

Ces figures 1 à 3 montrent donc de manière quantitative que l'augmentation de la tension du faisceau entraîne un parcours supérieur des électrons, tout en diminuant leur diffusion. Une énergie de quelques dizaines de keV est nécessaire ; des valeurs beaucoup plus élevées poseraient des problèmes techniques supplémentaires et diminueraient en outre de plus en plus la probabilité d'excitation des particules du gaz par les électrons. Pour l'équipement réalisé le générateur délivre une haute tension réglable entre :

$$\boxed{10 \text{ kV} \leqslant u \leqslant 50 \text{ kV}} .$$

D'un autre point de vue, l'intensité du faisceau doit être également la plus grande possible pour augmenter le signal mesuré, tout en restant cependant compatible avec un diamètre de l'ordre de 1 mm. La figure 4 représente la densité de courant i/s que peut délivrer la cathode en fonction de sa température de chauffage T_c pour différents matériaux émissifs [16]. La densité de courant est en outre limitée dans le faisceau par des phénomènes de charge d'espace ; une valeur couramment obtenue est de l'ordre de 10^3 A/m^2 = 1 mA/mm^2. La cathode réalisée est constituée d'une pastille de niobium encastrée dans du tungstène. Le courant du faisceau est réglable entre : $\boxed{0 \leqslant i \leqslant 5 \text{ mA}}$.

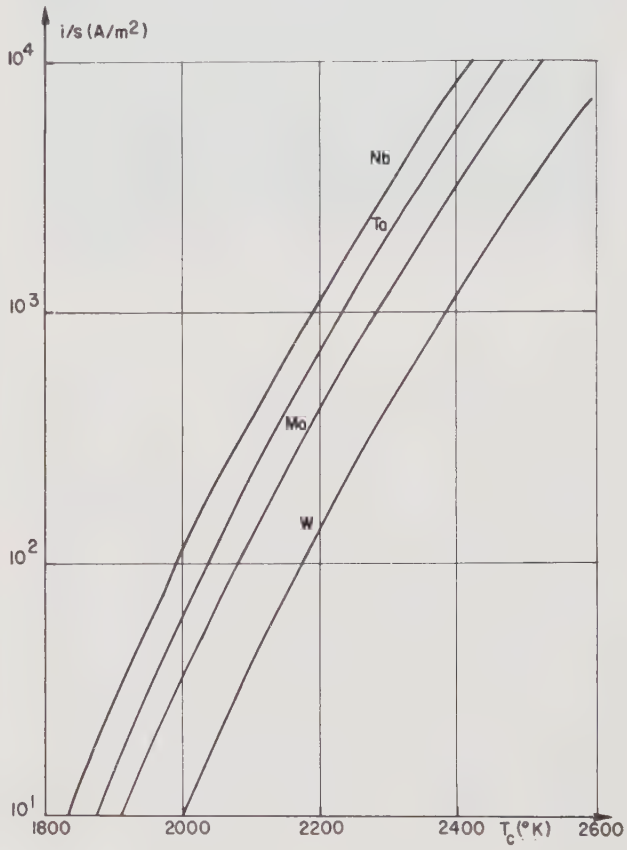


Fig. 4. — Densité de courant fournie par quelques matériaux émissifs.

1.2 Soufflerie étudiée. — La sonde à faisceau électronique de l'ONERA équipe une petite soufflerie continue hypersonique (Fig. 5). Celle-ci peut fonctionner soit avec de l'air, soit avec de l'azote. Les tuyères généralement utilisées fournissent un écoulement à Mach 8 ; leur diamètre au col est de 8 mm, celui en sortie vaut 144 mm. La longueur utile de l'écoulement est d'environ 150 mm. Les conditions typiques de fonctionnement sont les suivantes : pression génératrice 10^5 N/m^2, température génératrice pouvant atteindre 1 000 °K avec le réchauffeur utilisé dans les

expériences sur la température de rotation. Par conséquent, dans l'écoulement sain, la pression vaut 10 N/m^2 et la température reste inférieure à 72 °K.

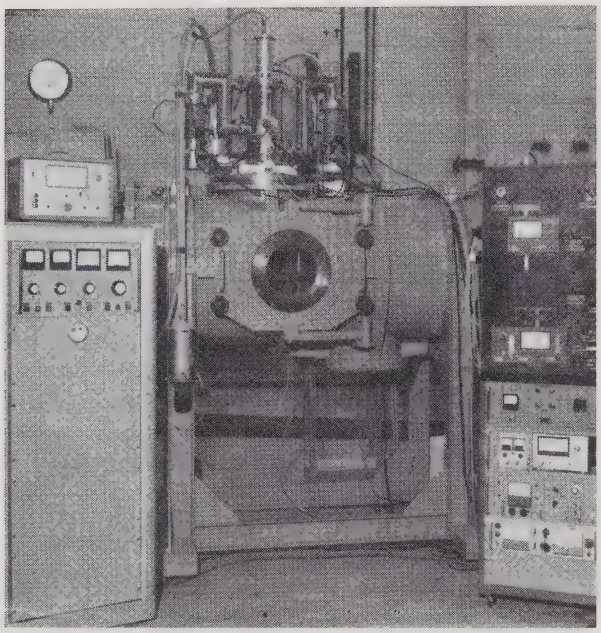


FIG. 5. — Vue d'ensemble du montage en soufflerie.

Le montage du canon à électrons sur la soufflerie comprend un système de pompage différentiel à deux étages, ce qui permet de maintenir une pression inférieure à 10^{-3} N/m^2 dans l'enceinte du canon tant que la pression n'atteint pas 10^3 N/m^2 dans le caisson de soufflerie. En outre, un joint glissant étanche au vide permet l'exploration de tout point de l'écoulement [7].

Le système optique de mesure de températures est représenté à la figure 6. Un châssis comprend une première lentille dont la distance au faisceau d'électrons est constante et égale à sa distance focale. Cette lentille, ainsi qu'un miroir de renvoi à $\Pi/4$, suivent les déplacements du faisceau d'électrons. Une seconde lentille focalise le pinceau lumineux sur la fente d'entrée

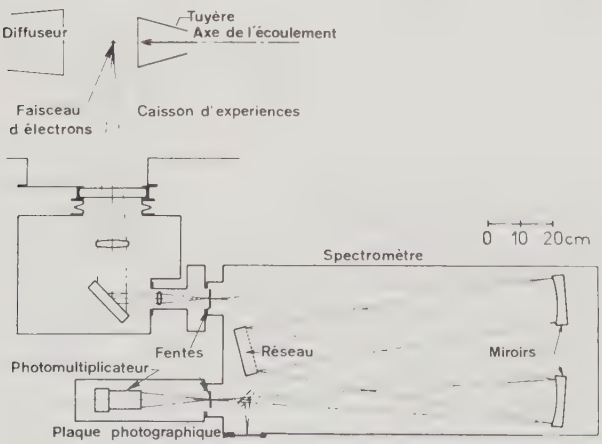


FIG. 6. — Système optique de mesure des températures en vue de dessus.

du spectromètre. Il est du type Czerny-Turner, de 1,25 m de distance focale, muni d'un réseau carré de 110 mm de côté à 1 221 traits/mm. La dispersion en sortie est de 0,6 nm/mm. Le spectre dû à l'ensemble du faisceau d'électrons peut être enregistré sur plaque photographique. Mais, pour la mesure d'intensités de raies, l'utilisation d'un photomultiplicateur est préférable : un point du faisceau est alors analysé grâce à la rotation du réseau (la largeur des fentes vaut environ le dixième du diamètre de l'image du faisceau).

2. **Modèles simples de calcul de la température de rotation.** — 2.1 SPECTRE EXCITÉ PAR LE FAISCEAU D'ÉLECTRONS. — Les molécules d'azote sont initialement dans leur état électronique fondamental $N_2(X\ ^1\Sigma_g^+)$. Soit n la densité numérique de cet état. Si n_v est la population du niveau de vibration v : $n = \sum_v n_v$. A l'équilibre de Boltzmann pour la vibration à la température T_v :

$$n_v = n_0 . \exp\left[- \frac{E_v(v) - E_v(0)}{kT_v} \right] \qquad (1)$$

où E_v est l'énergie de vibration. Si n_{vN} est la population du niveau de rotation N (*) de v : $n_v = \sum_N n_{vN}$. A l'équilibre de Boltzmann pour la rotation à la température T :

$$n_{vN} = n_{v_0} . g(2N + 1) . \exp\left[- \frac{E_R(N) - E_R(0)}{kT} \right] \qquad (2)$$

E_R est l'énergie de rotation :

$$E_R(N) = h.c.B_v.N(N + 1) = k.\theta_v.N(N + 1) \qquad (3)$$

et

$$E_R(0) = 0$$

où c est la vitesse de la lumière, h la constante de Planck, B_v la constante de rotation dans le niveau v et $\theta_v = hcB_v/k$ a la dimension d'une température ; dans $N_2(X\ ^1\Sigma_g^+)$: $\theta_0 = 2{,}863$ °K. Le facteur $(2N + 1)$ est proportionnel à la dégénérescence du niveau N et g est une dégénérescence supplémentaire due au spin nucléaire : pour l'azote, g vaut alternativement 1 et 2 dans les niveaux de rotation successifs.

Les électrons primaires du faisceau conduisent principalement à l'ionisation vers l'état excité $N_2^+(B\ ^2\Sigma_u^+)$. Il faut bien remarquer que le spin électronique change dans l'excitation de $N_2(X\ ^1\Sigma_g^+)$ en $N_2^+(B\ ^2\Sigma_u^+)$ puisqu'un électron est arraché de la molécule. Toutefois la section de collision correspondante, ou celle relative à un niveau de vibration, en fonction

(*) Le nombre quantique N remplace l'ancienne notation K en spectroscopie électronique moléculaire (*J. Opt. Soc. Amer.*, 1953, **43**, 425-426).

de l'énergie W des électrons incidents, est porportionnelle à la section d'ionisation σ_i (Fig. 1). D'après le paragraphe 1.1, comme le maximum est assez plat et la décroissance lente, tout se passe comme si cette transition était permise ([11], pp. 497 et 503) : cette hypothèse est habituellement faite et sera toujours admise par la suite. Notons qu'en revanche une excitation interdite, par exemple vers $N_2(C\ ^3\Pi_u)$, présente une section de collision d'allure très différente, avec un maximum pointu à une énergie peu supérieure au seuil de réaction et une décroissance rapide.

Il résulte de cette excitation une émission lumineuse très probable de $N_2^+(B\ ^2\Sigma_u^+)$ vers l'état fondamental $N_2^+(X\ ^2\Sigma_g^+)$. Elle constitue le premier système négatif de l'azote $N_2^+(1-)$. Les seules transitions permises entre un niveau supérieur (v', N') et un niveau inférieur (v'', N'') sont telles que $N' - N'' = -1$ ou $+1$, ce qui correspond respectivement aux branches P et R d'une bande de vibration [17]. Les figures 7 et 8 montrent l'enregistrement de la bande la plus intense $v' = v'' = 0$, respectivement à température ambiante dans un gaz au repos et à basse température (62 °K) en écoulement ; les masses volumiques sont sensiblement égales dans les deux cas, environ 5×10^{-4} kg/m^3. La branche P contient la tête de bande et seule la branche R est résolue ; les raies sont numérotées selon la valeur de N'. L'alternance $\frac{1}{2}$ dans l'intensité des raies est bien vérifiée.

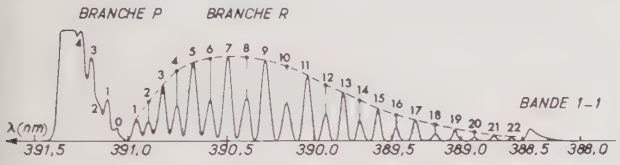


FIG. 7. — Spectre de rotation à température ambiante ($T = 290$ °K) dans un gaz au repos.

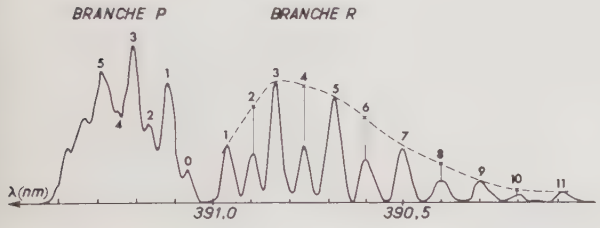


FIG. 8. — Spectre de rotation à basse température ($T = 62$ °K) en écoulement.

2.2 CALCUL DE LA TEMPÉRATURE PAR LA MÉTHODE DE BOLTZMANN. — Remarquons tout d'abord que la population relative des différents niveaux de rotation (2 et 3) renseigne immédiatement sur la température. En particulier, la dérivée de (2) par rapport à N donne la position du niveau le plus peuplé en fonction de T. S'il n'est pas tenu compte du terme g, dont il est aisé de s'affranchir lors des mesures par une correction immédiate, d'un facteur 2 dans le cas de l'azote, le nombre quantique du niveau recherché est la valeur entière la plus voisine de :

$$N_M = \sqrt{\frac{T}{2\,\theta_v}} - \frac{1}{2} \tag{4}$$

soit pour l'azote : $\theta_v \simeq \theta_0$ et $N_M = 0{,}418\ \sqrt{T} - 0{,}5$ d'où $N_M \simeq 7$ pour $T = 300$ °K et $N_M \simeq 3$ pour $T = 60$ °K.

Cependant l'intensité I d'une raie de rotation de longueur d'onde λ, émise à partir d'un niveau N' de v', ne représente pas exactement la population du niveau initial. En particulier, pour v' et v'' donnés, l'intensité d'une transition entre l'état initial $< N_i \mid$ et l'état final $\mid N_f >$ dépend d'un coefficient de proportionnalité S déduit du facteur de Hönl-London : $S = < N_i \mid \mu \mid N_f >$ où μ est proportionnel au moment de transition. Pour une transition dipolaire $N_i - N_f = \pm 1$ et S peut s'écrire, d'après ([17], p. 208 et [18], pp. 146 à 148) :

$$S = < N_i \mid \mu \mid N_f > = \frac{N_i + N_f + 1}{2(2\,N_i + 1)}. \tag{5}$$

Ainsi dans les branches P et R d'une bande :

$$\begin{cases} S_P = < N' \mid \mu \mid N' + 1 > = \dfrac{N' + 1}{2\,N' + 1} \\ S_R = < N' \mid \mu \mid N' - 1 > = \dfrac{N'}{2\,N' + 1} \end{cases} \tag{6}$$

Finalement l'intensité I s'exprime comme le produit des facteurs suivants :

— un terme C_0' constant lors de l'enregistrement d'une branche de bande, c'est-à-dire indépendant de N' ;

— la population du niveau de rotation supérieur $n_{v'N'}$;

— la probabilité de transition : elle résulte du coefficient d'Einstein d'émission spontanée par unité de temps, incluant en particulier le facteur de Franck-Condon, et inversement proportionnel à λ^3, et du facteur S précédemment introduit ;

— l'énergie d'un photon émis, hc/λ (celle-ci n'a pas à être prise en compte si I représente un nombre de photons, par exemple lors de mesures avec un photomultiplicateur).

Par conséquent l'intensité lumineuse vaut ([17], pp. 126 et 127) :

$$I = C_0' \cdot n_{v'N'} \cdot \frac{S}{\lambda^4}. \tag{7}$$

La position de la raie la plus intense, comme précédemment indépendamment du facteur g, est obtenue en dérivant (7) par rapport à N'. Dans l'hypothèse où la distribution de rotation des molécules excitées est

en équilibre de Boltzmann (2), les valeurs N'_{MP} et N'_{MR}, pour les branches P et R respectivement, sont :

$$N'_{MP} = \frac{\sqrt{8\,T/\theta_{v'} + 1} - 3}{4}$$

et

$$N'_{MR} = \frac{\sqrt{8\,T/\theta_{v'} + 1} - 1}{4}.$$

Si $8\,T/\theta_{v'} \gg 1$, ce qui est toujours le cas :

$$N'_{MP} \simeq \sqrt{\frac{T}{2\,\theta_{v'}}} - \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad N'_{MR} \simeq \sqrt{\frac{T}{2\,\theta_{v'}}} - \frac{1}{4}. \quad (8)$$

Ces valeurs sont pratiquement les mêmes que celles de (4). Ce résultat se vérifie sur l'enveloppe des raies aux figures 7 et 8. De tels calculs sont très précieux pour donner une indication immédiate de la température, mais sont fort peu précis. Il est possible d'améliorer cette méthode approximative en calculant le rapport d'intensités de deux raies ou deux groupes de raies en fonction de la température, d'après (7), et en comparant avec la mesure correspondante.

Mais il existe une méthode connue ([17], p. 206 et [18], Chap. 17), appelée dans la suite méthode de Boltzmann, pour déterminer la température de rotation par spectroscopie. Elle n'est nullement spécifique à la technique du faisceau d'électrons. Elle repose sur la relation suivante, déduite de (2) et (7), valable pour toute valeur de N' et s'écrivant pour les raies de la branche R par exemple :

$$\boxed{\mathrm{Log}\,\frac{\lambda^4.I}{g.N'} = -\frac{\theta_{v'}}{T}\cdot N'(N'+1) + C_0} \quad (9)$$

avec

$$C_0 = \mathrm{Log}\,(C'_0.n_{v_0}).$$

En fait, λ reste pratiquement constante dans une branche et le terme correspondant pourrait être inclus dans C'_0 ou C_0.

Finalement, le premier membre exprimé en fonction de $N'(N'+1)$ est une droite de pente négative $-p = -\theta_{v'}/T$, ce qui fournit la température de rotation. Le facteur g est donné pour l'état $N_2^+(B\ ^2\Sigma_u^+)$ par $g = 1$ pour N' pair et $g = 2$ pour N' impair.

Cette méthode s'appliquerait aux expériences présentées si l'excitation des molécules de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}'$ par le faisceau d'électrons conservait la distribution initiale des molécules dans les niveaux de rotation. Or, ce n'est pas rigoureusement exact.

2.3 Modèle de Muntz. — Muntz a conçu un modèle théorique permettant d'utiliser la technique du faisceau d'électrons pour la mesure des températures [3]. Comme les électrons primaires du faisceau ont une énergie élevée, et d'après la remarque du paragraphe 2.1, il est tout à fait valable d'émettre l'hypothèse que l'excitation qu'ils induisent vérifie les mêmes règles de sélection que l'absorption dans un champ électromagnétique. En outre, pour simplifier, l'excitation de $N_2(X\ ^1\Sigma_g^+)$ à $N_2^+(B\ ^2\Sigma_u^+)$ est assimilée à une transition $^1\Sigma_g^+ \leftrightarrow {}^1\Sigma_u^+$. Par conséquent, dans cette hypothèse, seuls les niveaux $N = N' \pm 1$ peuvent peupler un niveau N'. Dans ces conditions $n_{v'N'}$ est remplacé par :

$$\sum_v \left(< N'-1 \mid \mu \mid N' > n_{v,N'-1} + \right.$$
$$\left. + < N'+1 \mid \mu \mid N' > n_{v,N'+1}\right)$$

qui s'écrit à l'équilibre thermodynamique, d'après la relation (5) :

$$g \sum_v n_{v_0} \left\{ N'.\exp\left[-(N'-1)\,N'\,\frac{\theta_v}{T}\right] + \right.$$
$$\left. + (N'+1).\exp\left[-(N'+1)\,(N'+2)\,\frac{\theta_v}{T}\right]\right\}.$$

En fait θ_v varie très peu avec v ; comme le niveau $v = 0$ est le plus peuplé, il peut être seul pris en compte. Plus généralement, à température de vibration élevée où les niveaux $v > 0$ ont une population non négligeable, il peut être posé $\theta_v = \theta \simeq \theta_0$, où θ est une valeur moyenne. Ainsi $\sum_v n_{v_0}$ est inclus dans la constante de proportionnalité. Par la suite, dans toutes les applications numériques, comme $T_v < 800$ °K : $\theta = \theta_0$.

Pour obtenir I sous une forme voisine de (9), écrivons :

$$I = C'_1 \cdot n_{N'} \cdot \Phi_1(N', T) \cdot \frac{S}{\lambda^4}$$

avec

$$n_{N'} = g(2\,N'+1).\exp\left[-N'(N'+1)\,\frac{\theta}{T}\right] \quad (10)$$

et donc :

$$\Phi_1(N', T) = \frac{N'}{2\,N'+1} \cdot \exp\left[\frac{2\,N'\,\theta}{T}\right] + \frac{N'+1}{2\,N'+1} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{2(N'+1)\,\theta}{T}\right]. \quad (11)$$

Finalement :

$$\boxed{\mathrm{Log}\,\frac{\lambda^4.I}{g.N'.\Phi_1(N', T)} = -\frac{\theta}{T}N'(N'+1) + C_1} \quad (12)$$

avec

$$C_1 = \mathrm{Log}\,C'_1.$$

La principale différence entre (9) et (12) est que le premier membre contient maintenant l'inconnue T. Il faut donc procéder par récurrence : une première valeur de T permet de porter le premier membre en fonction de $N'(N'+1)$ et d'obtenir une nouvelle

valeur de T. Le calcul est arrêté quand la différence entre deux valeurs successives de T est inférieure à la précision souhaitée. Remarquons enfin que, dans l'état $N_2(X\,{}^1\Sigma_g^+)$, $g = 1$ pour N impair et $g = 2$ pour N pair. Comme $N' - N = \pm 1$, nous retrouvons comme au paragraphe précédent que $g = 1$ pour N' pair et $g = 2$ pour N' impair.

2.4 Simplification de la méthode de Muntz. — L'auteur a déjà suggéré une simplification de la méthode précédente : elle évite le calcul de la fonction $\Phi_1(N', T)$ et la température est obtenue directement, sans itération [9]. Cette simplification repose sur le développement limité des exponentielles de $\Phi_1(N', T)$. Ce développement est d'autant plus précis que $2(N' + 1)\,\theta/T$ est petit, ce qui est généralement vrai.

En effet, tous les niveaux de rotation sont théoriquement peuplés, mais les molécules sont principalement groupées sur les premiers niveaux ; ceux-ci sont en nombre d'autant plus faible que la température est basse. Soit N_L le nombre approximatif de niveaux sur lesquels se trouve la fraction $(1 - \eta)$ des molécules du niveau de vibration considéré. Si l'alternance de population g est négligée, N_L est un entier tel que :

$$\sum_{N=N_L}^{+\infty} n_N = \eta \sum_{N=0}^{+\infty} n_N$$

ou

$$\int_{N_L}^{+\infty} n_N . dN = \eta \int_0^{+\infty} n_N . dN$$

soit

$$\exp\left[- N_L(N_L + 1)\frac{\theta}{T}\right] = \eta$$

ou

$$N_L(N_L + 1) = \frac{T}{\theta}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{\eta},$$

$$N_L = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4\,\frac{T}{\theta}\cdot \mathrm{Log}\,\frac{1}{\eta} + 1} - 1\right). \qquad (13)$$

Comme

$$\frac{T}{\theta}\cdot \mathrm{Log}\,\frac{1}{\eta} \gg 1 :$$

$$N_L \simeq N_L + 1 \simeq \sqrt{N_L(N_L + 1)} = \sqrt{\frac{T}{\theta}\cdot \mathrm{Log}\,\frac{1}{\eta}}.$$

Lors de l'excitation par les électrons du faisceau, le niveau N_L peuple les niveaux $N' = N_L \pm 1$. Finalement l'ordre de grandeur de l'expression initiale $2(N' + 1)\,\theta/T$ est :

$$\frac{2(N' + 1)\,\theta}{T} < \frac{2(N_L + 2)\,\theta}{T} \simeq 2\sqrt{\frac{\theta}{T}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{\eta}}$$

soit

$$\frac{7{,}26}{\sqrt{T(^\circ\mathrm{K})}} \qquad \text{pour} \qquad \eta = 1\,\%.$$

Même à basse température pour $T = 60$ °K : $7{,}26/\sqrt{T} = 0{,}94$ seulement.

Ces résultats confirment la validité du développement de $\Phi_1(N', T)$. Celui-ci, limité au troisième ordre donne :

$$\Phi_1(N', T) = 1 - 2\frac{\theta}{T} + 2\frac{\theta^2}{T^2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{\theta^3}{T^3} + \cdots +$$

$$+ \left(2\frac{\theta^2}{T^2} - \frac{8}{3}\cdot\frac{\theta^3}{T^3} + \cdots\right) N'(N' + 1) + \cdots$$

et

$$\mathrm{Log}\,\Phi_1(N', T) = - 2\frac{\theta}{T} + \varepsilon\frac{\theta^3}{T^3} +$$

$$+ \left(2\frac{\theta^2}{T^2} + \frac{4}{3}\cdot\frac{\theta^3}{T^3} + \cdots\right) N'(N' + 1) + \cdots \qquad (14)$$

où ε est un infiniment petit. Dans cette approximation, $\mathrm{Log}\,\Phi_1(N', T)$ est une fonction linéaire de $N'(N' + 1)$. L'égalité (12) devient :

$$\mathrm{Log}\,\frac{\lambda^4 . I}{g . N'} = \left[- \frac{\theta}{T} + 2\left(\frac{\theta}{T}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{\theta}{T}\right)^3 + \cdots\right] \times$$

$$\times N'(N' + 1) + \cdots + C_1'' \qquad (15)$$

avec $C_1'' = C_1 - 2(\theta/T) + \varepsilon(\theta/T)^3$, constante par rapport à N'.

Le premier membre de (15) est identique à celui de (9). Si seuls les termes écrits sont pris en compte, c'est encore une droite en fonction de $N'(N' + 1)$. La pente $- p$ a une écriture un peu plus compliquée. En première approximation $\theta/T \ll 1$ et : $T_0 = \theta/p$ exactement comme par (9).

De manière plus précise, avec le terme suivant $2(\theta/T)^2$, T est donnée par une équation du second degré :

$$p\left(\frac{T}{\theta}\right)^2 - \frac{T}{\theta} + 2 = 0 .$$

La racine qui convient est telle que $T/\theta \to 1/p$ quand θ/T ou $p \to 0$; c'est donc :

$$\boxed{T = T_0 \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - 8\,p}}{2}} . \qquad (16)$$

La figure 9 représente $(T^2/2\,\theta_0^2).\mathrm{Log}\,\Phi_1(N', T) + (T/\theta_0)$, avec la valeur exacte de $\Phi_1(N', T)$, en fonction de $N'(N' + 1)$ pour différentes valeurs de T. La partie utile des courbes est celle pour laquelle

$$N'(N' + 1) \leqslant N_L(N_L + 1)$$

avec par exemple $\eta = 1\,\%$: les tracés sont en pointillés au-delà de cette limite. D'après les relations (14) et (15), l'approximation (16) est applicable quand ces courbes sont voisines de la première bissectrice ; c'est donc toujours le cas en pratique.

En outre, comme $p \ll 1$, le développement limité de (16) donne :

$$T = T_0(1 - 2\,p - 4\,p^2 + \cdots)$$

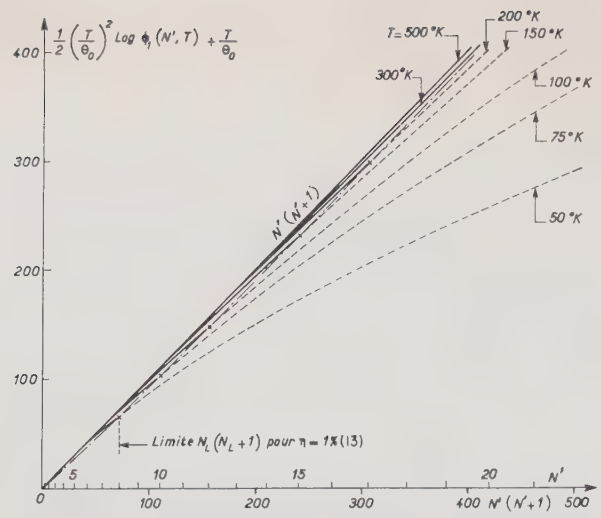


FIG. 9. — Validité du développement limité de Log $\Phi_1(N', T)$.

soit

$$\boxed{T \simeq T_0 - 2\,\theta \simeq T_0 - 6\ ^\circ\mathrm{K}} \ . \qquad (17)$$

Cette dernière relation conduit donc à une température supérieure à celle donnée par (16) d'environ :

$$4\,T_0\,p^2 = 4\,\frac{\theta^2}{T_0} \simeq \frac{33}{T_0}$$

soit 0,6 °K à 60 °K et 0,1 °K à 300 °K.

Il est intéressant de comparer la température T_1 obtenue par le modèle de Muntz (12) et la valeur de T déduite de la méthode de Boltzmann et de (16) ou (17). Le schéma du calcul est le suivant :

$$T_1 \xrightarrow{(12)} I\,(N' = 1, 2, \ldots, M) \xrightarrow{(16)\text{ ou }(17)} T\ .$$

La figure 10 montre les résultats pour un nombre M de raies à peu près égal à N_L. Il apparaît que la relation la plus simple (17) est beaucoup plus proche que (16) de la méthode de Muntz ; ceci est tout à fait possible puisque (16) est déjà une expression approchée. A température ambiante la différence entre les trois valeurs trouvées vaut 0,1 °K environ, soit 3×10^{-4} en valeur relative ; elle est donc parfaitement négligeable. A basse température, vers 60 °K, cette différence est de l'ordre de 0,5 °K, soit 1 %.

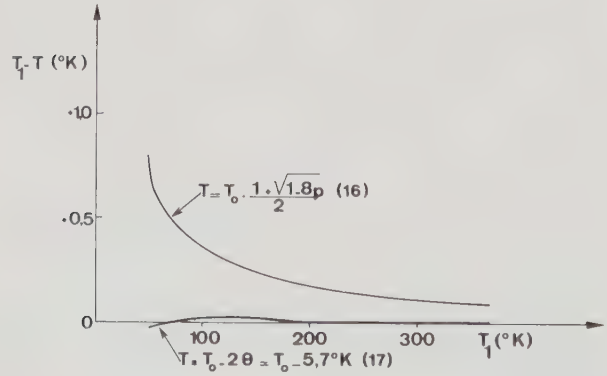


FIG. 10. — Comparaison théorique de la méthode de Muntz et des méthodes simplifiées.

Physiquement, ces calculs et ces conclusions signifient que l'excitation par les électrons ne bouleverse pas énormément la distribution initiale des molécules : Φ_1 est une fonction correctrice de l'ordre de l'unité. Cependant la correction de $2\,\theta$ par rapport à T_0 est supérieure à l'incertitude des mesures, surtout aux basses températures. Il est donc bien nécessaire d'en tenir compte. Tous ces résultats se vérifient d'ailleurs parfaitement lors de l'analyse de spectres réels. Par conséquent, la méthode simplifiée suggérée dans ce paragraphe donne des résultats aussi corrects que la méthode de Muntz. *Il suffit de calculer* $T_0 = \theta/p$ *par la méthode de Boltzmann et de retrancher* $2\,\theta \simeq 6$ °K.

3. **Modèles de calcul tenant compte de phénomènes secondaires.** — 3.1 POSE DU PROBLÈME — En fait, dès les premières applications de la méthode de Muntz, il est apparu que celle-ci donnait des températures trop élevées [19]. L'écart augmente quand la température diminue et quand le nombre de raies utilisées croît : ceci signifie que la queue de distribution ne donne pas rigoureusement une droite, mais une courbe, dont la concavité est tournée vers le haut. Ces constatations montrent d'ailleurs que la méthode simplifiée du paragraphe 2.4 est d'autant plus voisine de celle de Muntz que celle-ci s'applique mieux.

Enfin l'écart augmente avec la densité numérique n. Des courbes de correction empiriques, adaptées à une réalisation expérimentale donnée, ont été proposées[20]. En fait, ceci laisse penser à l'influence des électrons secondaires, qui sont créés à chaque ionisation, donc en nombre proportionnel à la densité numérique. Des modèles mieux justifiés du point de vue théorique sont alors apparus. Ainsi, Lillicrap et Harvey [21] ont proposé de remplacer $\Phi_1(N', T)$ par :

$$\Phi(N', T) = \Phi_1(N', T)\,[1 + n.\Phi_s(N', T)]$$

où $\Phi_s(N', T)$ est due aux électrons secondaires et est déterminée expérimentalement. Ainsi, quand $n \to 0$: $\Phi(N', T) \to \Phi_1(N', T)$ de Muntz.

Le rôle des électrons secondaires est important car ils ont une énergie plus faible que les électrons primaires et leur fréquence de collision est plus élevée (cf. Fig. 1). Cependant, la règle de sélection $N' - N = \pm 1$, justifiée au début du paragraphe 2.3 pour les électrons à haute énergie n'est pas rigoureusement valable pour les électrons lents. On peut imaginer pour ceux-ci que les collisions qu'ils induisent conduisent à une légère redistribution des molécules dans les niveaux de rotation par une ou plusieurs transitions quadripolaires de N à $N \pm 2$ ([17], p. 131). D'après (5) :

$$< N \mid \mu \mid N + 2 > = \frac{N+1}{2N+1} \cdot \frac{N+2}{2N+3}$$

et

$$< N \mid \mu \mid N - 2 > = \frac{N}{2N + 1} \cdot \frac{N - 1}{2N - 1}.$$

Finalement, la seule règle de sélection s'appliquant à l'excitation par les électrons secondaires est $\Delta N = \mid N' - N \mid$ impair (le module introduit ici dans la définition de ΔN facilitera les écritures par la suite).

C'est ainsi que Hickman [22] a proposé de tenir compte d'une transition $\Delta N = 0$ ou 2 suivie d'une transition $\Delta N = 1$, soit finalement les transitions $\Delta N = 1$ et $\Delta N = 3$; celles-ci comprennent non seulement $N' - 3 \rightarrow N' - 1 \rightarrow N'$ et

$$N' + 3 \rightarrow N' + 1 \rightarrow N',$$

mais aussi $N' - 1 \rightarrow N' + 1 \rightarrow N'$ et

$$N' + 1 \rightarrow N' - 1 \rightarrow N'.$$

Williams [23] a remarqué que par cette méthode le tracé en fonction de $N'(N' + 1)$, au lieu d'être une droite, est une courbe à concavité vers le haut plus marquée que par le modèle de Muntz ; en outre la température ainsi obtenue est trop basse. Il préfère considérer les transitions $\Delta N = 1$ et les transitions $\Delta N = 2$ suivies de $\Delta N = 1$, sans introduire $\Delta N = 0$. Ceci donne de meilleurs résultats. Dans ces deux cas, les transitions pour les différentes valeurs de ΔN sont pondérées uniquement par les forces de raies S.

Smith [24] a suggéré un modèle plus élaboré, tenant compte d'une transition dipolaire $\Delta N = 1$, éventuellement précédée de une ou plusieurs transitions quadripolaires $\Delta N = 2$, ce qui le conduit à considérer l'ensemble des transitions ΔN impair. Il fait en outre intervenir le spectre énergétique des électrons secondaires et leurs sections efficaces de collision, fournis par différents auteurs, ainsi que la proportion des électrons secondaires. Celle-ci fait l'objet d'une mesure annexe en fonction de la densité numérique pour des conditions expérimentales données [25]. Cette méthode a été rendue opérationnelle au Laboratoire d'Aérothermique du CNRS, en France [26], [27]. Elle conduit cependant à un programme de calcul compliqué, car celui-ci nécessite un grand nombre de données numériques connues avec une précision souvent médiocre. Enfin, la mesure approximative de la masse volumique est nécessaire, et la détermination de la distribution de rotation implique l'inversion d'une matrice dont le choix de la dimension peut poser des problèmes.

3.2 Méthode de calcul utilisée. — La méthode de calcul utilisée s'inspire des résultats qui viennent d'être rappelés. Elle essaie de tenir compte au mieux des électrons secondaires tout en restant facile à mettre en œuvre. Il suffit de généraliser la formulation de Muntz du paragraphe 2.3 avec toutes les transitions ΔN impair. En effet, de toute manière, l'excitation de $N_2(X\ ^1\Sigma_g^+)$ à $N_2^+(B\ ^2\Sigma_u^+)$ correspond à une transition entre états $^1\Sigma_g^+ \leftrightarrow {}^2\Sigma_u^+$, pour laquelle ΔN pair est rigoureusement interdit par raison de symétrie. Ce résultat peut être comparé à l'étude de l'ionisation de $H_2(X\ ^1\Sigma_g^+)$ en $H_2^+(X\ ^2\Sigma_g^+)$ ([28] et [29], Appendix), c'est-à-dire une transition entre états $^1\Sigma_g^+ \rightarrow {}^2\Sigma_g^+$, pour laquelle c'est au contraire ΔN impair qui est interdit. Par conséquent, cette excitation, avec ΔN impair ici, conduit à des règles de sélection identiques à celles énoncées au paragraphe précédent. Finalement, quel que soit le modèle d'excitation choisi, il reste toujours parfaitement valable de remplacer la fonction $\Phi_1(N', T)$ du paragraphe 2.3 par une fonction d'excitation $\Phi(N', T)$ plus générale, définie par :

$$n_{N'} . \Phi(N', T) = \sum_{\Delta N \text{impair}} a_{\Delta N} \times \times \left(< N' - \Delta N \mid \mu \mid N' > n_{N' - \Delta N} + < N' + \Delta N \mid \mu \mid N' > n_{N' + \Delta N} \right).$$

Les probabilités de transition peuvent être déduites de (5) :

$$< N' - \Delta N \mid \mu \mid N' > = \prod_{i=1}^{\Delta N} \frac{N' - i + 1}{2(N' - i) + 1}$$

et

$$< N' + \Delta N \mid \mu \mid N' > = \prod_{i=1}^{\Delta N} \frac{N' + i}{2(N' + i) + 1},$$

$n_{N'}$ est donnée en (10) et $n_{N' \pm \Delta N}$ s'en déduit. Pour chaque valeur de N', quelle que soit la valeur de ΔN impair, tous les facteurs g sont égaux : leur valeur est celle donnée à la fin du paragraphe 2.3.

Les coefficients $a_{\Delta N}$ sont des facteurs de proportionnalité positifs ou nuls : $a_1 = 1$ et les valeurs suivantes peuvent être ajustées à volonté selon le modèle précis étudié. Ainsi, le modèle de Muntz (§ 2.3) correspond à $a_{\Delta N \geqslant 3} = 0$. Une méthode inspirée de celle de Smith [24] à [27] consisterait à choisir les $a_{\Delta N > 1}$ en fonction du nombre d'électrons secondaires ou, ce qui revient au même, de la densité numérique. Il faut aussi remarquer que les coefficients

$$< N' \pm \Delta N \mid \mu \mid N' >$$

diminuent quand ΔN augmente. Par conséquent même si les facteurs $a_{\Delta N}$ sont égaux, les transitions à ΔN élevé ont peu d'importance. Enfin, à la différence du modèle de Smith, les mêmes valeurs de ΔN autour de chaque N' sont prises en compte.

Finalement :

$$I = C' \cdot n_{N'} \cdot \Phi(N', T) \cdot \frac{S}{\lambda^4}$$

et

$$\boxed{\text{Log} \frac{\lambda^4 . I}{g . N' . \Phi(N', T)} = - \frac{\theta}{T} \cdot N'(N' + 1) + C} \quad (18)$$

avec

$$C = \text{Log } C' .$$

La méthode de calcul de température est identique à celle de Muntz. Toutefois la fonction $\Phi(N', T)$ est plus compliquée que $\Phi_1(N', T)$.

3.3 Analyse des spectres. — Un programme de calcul destiné au dépouillement des spectres enregistrés a été mis au point. La valeur maximale retenue pour ΔN et les coefficients $a_{\Delta N}$ sont des données. La pente de la droite (18) est calculée par une méthode des moindres carrés et par itération, à partir d'une température initiale T_i. La récurrence est arrêtée quand la différence entre deux températures successives est inférieure à la précision souhaitée ou éventuellement si le nombre d'itérations atteint une valeur préalablement fixée.

Les écarts entre les ordonnées traduisant la relation (18) en fonction de $N'(N' + 1)$ et celles de la droite moyenne montrent une éventuelle courbure due à la fonction $\Phi(N', T)$ retenue. L'écart-type relatif à la température, également calculé dans le programme, renseigne sur la dispersion des points de mesure. Naturellement, cette quantité n'indique pas la précision des résultats, puisqu'elle ne tient pas compte des erreurs systématiques ; elle augmente cependant si Φ conduit à une courbure en fonction de $N'(N' + 1)$.

Pour chaque enregistrement, les calculs sont faits pour un nombre M de raies, où M varie dans un intervalle $[M_{min}, M_{max}]$. L'ordre des raies dans le programme est quelconque, ce qui permet de choisir la succession des raies supprimées à chaque fois que M décroît d'une unité. Le tracé de T en fonction de M montre en effet la dispersion des mesures. En outre, si l'ordre des raies est respecté et si ce sont les premières raies qui sont successivement enlevées, une pente générale dans les résultats indique que le modèle choisi conduit à une courbure par rapport à la droite moyenne fonction de $N'(N' + 1)$, vers le haut si cette pente est négative, vers le bas dans le cas contraire. Si les dernières raies sont ôtées, les conclusions sont inversées. Il faut aussi remarquer qu'un léger décalage du zéro de l'enregistrement entraînerait également une courbure générale.

Le programme permet de comparer les résultats réels obtenus par les différentes méthodes, en particulier :

① — méthode de Muntz (§ 2.3) : $\Delta N \leqslant 1$, $a_1 = 1$;

② — méthode simplifiée (§ 2.4) : $\Delta N \leqslant 1$, $a_1 = 1$, $T_i \to + \infty$ ($T_i = 10^{38}$ °K) car

$$\Phi_1(N', T \to + \infty) \to 1 ,$$

1 seule itération ; la température T_0 du paragraphe 2.2 est ainsi obtenue et la température cherché s'en déduit immédiatement par les relations (16) ou (17) ;

③ — méthode de Williams [23] : $\Delta N \leqslant 3$, $a_1 = a_3 = 1$ et prise en compte des deux types de transitions $N' \pm 1 \to N' \mp 1 \to N'$. Il semble cependant inutile de considérer ces deux dernières transitions. C'est pourquoi les modèles suivants ont aussi été essayés :

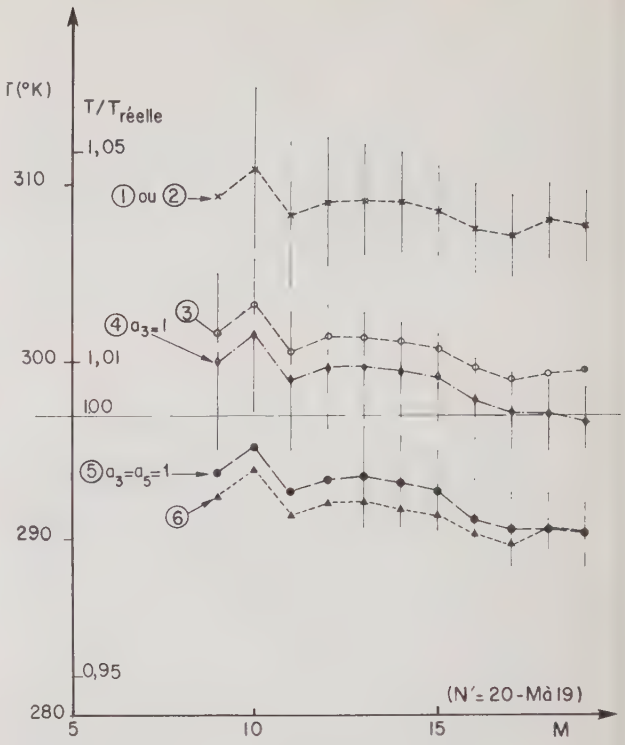


Fig. 11. — Expérience à température ambiante dans un gaz au repos.

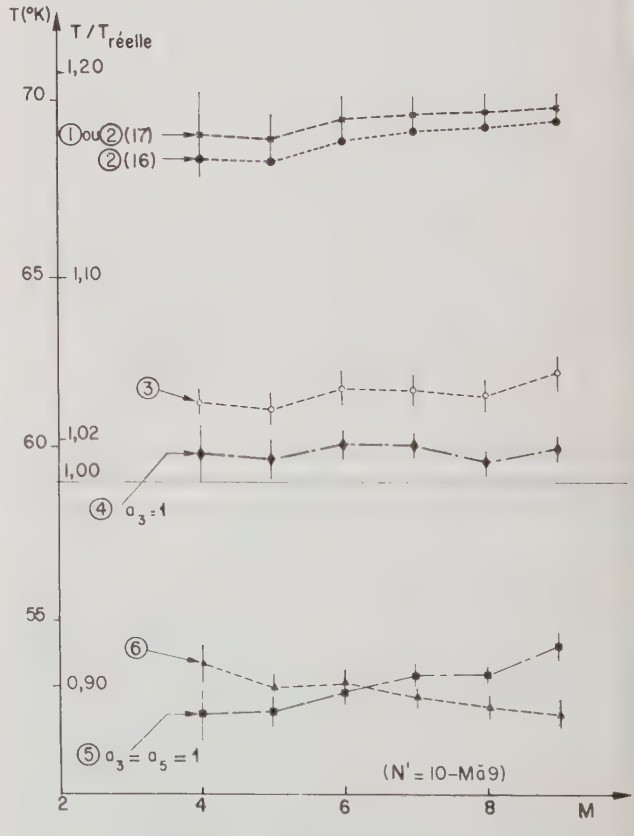


Fig. 12. — Expérience à basse température en écoulement.

④ — $\Delta N \leqslant 3 : a_1 = 1, a_3$ variable ;
⑤ — $\Delta N \leqslant 5 : a_1 = 1, a_3$ et a_5 variables ;
⑥ — méthode de Hickman [22] : comme ③, avec une fonction spéciale pour $\Delta N = 1$.

Les figures 11 et 12 montrent les dépouillements de spectres respectivement à température ambiante et à basse température en fonction du nombre M de raies utilisées : les dernières raies enregistrées sont conservées pour le calcul. La température réelle est mesurée de manière classique en statique et déduite des conditions génératrices en écoulement. Les barres verticales représentent l'écart-type précédemment défini. Le modèle de Muntz donne des résultats trop élevés. Tous les coefficients $a_{\Delta N}$ de ④ et ⑤ sont choisis

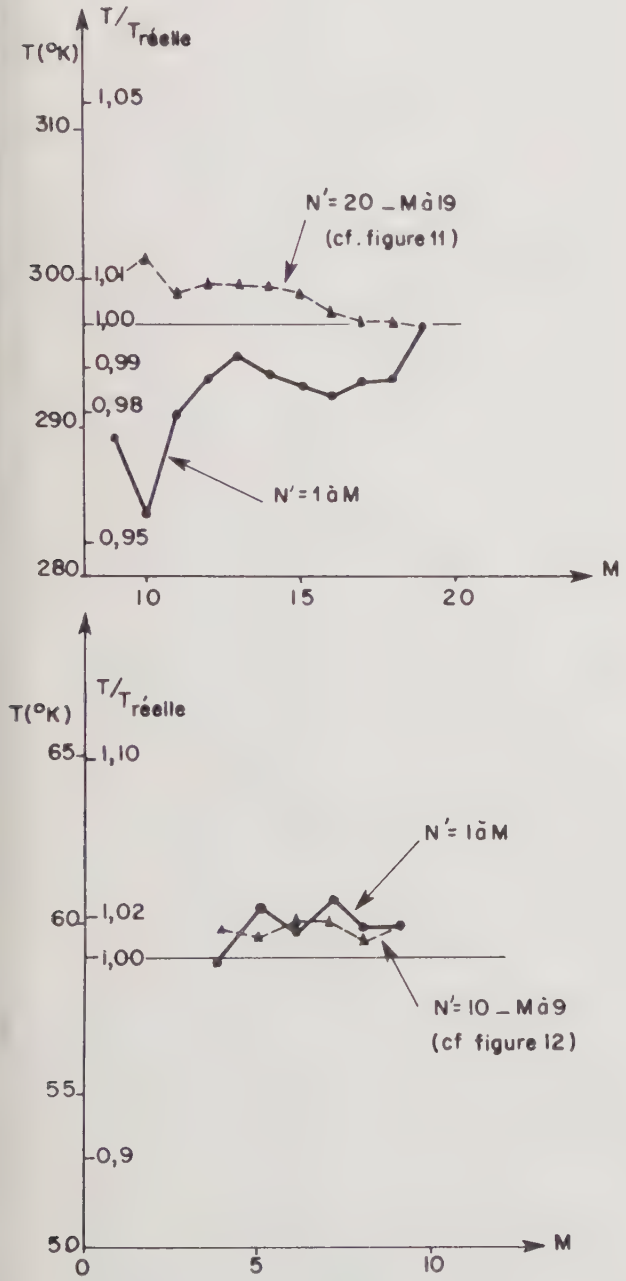


FIG. 13. — Influence du choix des raies utilisées : cas de la méthode ④ avec $a_3 = 1$.

unitaires ; dans ce cas ③ et ④ donnent des résultats voisins. *Il semble que le modèle ④, le plus simple tenant compte des électrons secondaires, donne des résultats parfaitement corrects.* Pour nos conditions expérimentales, en particulier dans le domaine de masses volumiques étudié : $a_3 = 1$ convient bien. Pour d'autres conditions, il faudrait éventuellement choisir $a_3 \neq 1$. Enfin ⑤ et ⑥ sont proches l'un de l'autre, mais fournissent des valeurs plus faibles.

En ce qui concerne la précision des résultats, des variations plus importantes apparaissent selon le nombre M de raies si ce sont les premières, et non plus les dernières, qui sont conservées. Ceci est illustré à la figure 13, relative aux mêmes spectres que les 2 figures précédentes, analysés selon le modèle ④ avec $a_3 = 1$. Pour les premières raies, les abscisses $N'(N' + 1)$ sont en effet très voisines : par rapport aux raies suivantes, la même incertitude, soit sur la mesure des intensités, soit sur le choix du modèle de calcul, peut conduire à une erreur plus importante sur la pente. En outre, ces raies sont les plus rapprochées en longueurs d'ondes : par conséquent, leurs profils peuvent se chevaucher si la résolution du spectromètre n'est pas suffisante.

3.4 COMPARAISON NUMÉRIQUE DES DIVERS MODÈLES. — La comparaison théorique des résultats donnés par différentes méthodes s'obtient en généralisant le raisonnement de la fin du paragraphe 2.4. La température T obtenue pour une certaine fonction $\Phi(N', T)$ est comparée à T_1 obtenue pour une autre fonction $\Phi_1(N', T)$, par exemple celle de Muntz. Le calcul répond au schéma suivant :

$$T_1 \xrightarrow{\Phi_1(N', T_1)} I\,(N' = 1, 2, \ldots, M) \xrightarrow{\Phi(N', T)} T .$$

Soit donc une température T_1 qui serait déduite du modèle $\Phi_1(N', T_1)$: les intensités des différentes raies N' vérifieraient donc la relation (12). Ces mêmes intensités conduisent pour le modèle $\Phi(N', T)$ à une nouvelle température T déduite de (18). La différence membre à membre des relations (12) et (18) donne pour chaque valeur de N' :

$$N'(N' + 1)\frac{\theta}{T_1} + \operatorname{Log}\frac{\Phi(N', T)}{\Phi_1(N', T_1)} = \frac{\theta}{T} N'(N' + 1) + (C_1 - C) \qquad (19)$$

Il est par conséquent inutile de passer par l'intermédiaire du calcul des intensités de raies. Comme précédemment, le premier membre en fonction de $N'(N'+1)$ est une droite de pente θ/T et T se calcule par itération.

Un programme de calcul par la méthode des moindres carrés a été écrit pour trouver la température à partir de l'expression (19). Il a été utilisé pour la figure 10 pour $M = N_L(\eta = 1\ \%)$ dans l'hypo-

thèse particulièrement simple où $\Phi(N', T) \equiv 1$ (cas ② au paragraphe précédent). Attachons-nous maintenant à l'étude du modèle ④ du paragraphe précédent, puisque celui-ci semble bien convenir : le coefficient de pondération a_3 est variable ; $a_3 = 0$ est le cas particulier ① de Muntz. Les figures 14, 15 et 16 illustrent sous différentes formes quelques-uns des résultats obtenus. La figure 14 fournit la correction $(T_1 - T)$ pour différentes valeurs de T_1 et a_3 en fonction du nombre M de raies utilisées : $N' = N_L + 1 - M$ à N_L, où N_L est calculé pour $\eta = 1$ %. La correction varie peu avec N. Remarquons d'ailleurs, comme à la fin du paragraphe précédent, que les variations sont plus importantes si $N' = 1$ à M : ceci résulte des premiers points calculés par (19), qui ne sont pas rigoureusement alignés avec les autres.

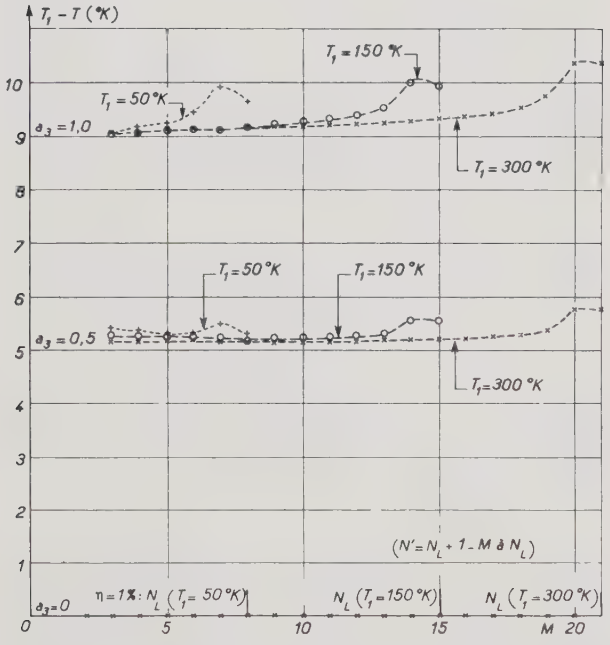


FIG. 14. — Correction en fonction du nombre de raies utilisées.

Les figures 15 et 16 montrent la différence $(T_1 - T)$ calculée pour $M = N_L$, respectivement en fonction de T_1 pour différentes valeurs de a_3 et en fonction de a_3 pour différentes valeurs de T_1. La figure 15 donne également N_L en fonction de T pour $\eta = 1$ % d'après (13). Comme c'est déjà visible sur la figure 14, la correction absolue $(T_1 - T)$ croît quand a_3 augmente. En outre, pour a_3 donné, elle est pratiquement indépendante de la température. Par conséquent, la correction relative $(1 - T/T_1)$ augmente aux basses températures, ce qui est normal puisque le modèle de Muntz conduit à des erreurs de plus en plus importantes quand la température diminue.

Les figures 15 ou 16 permettent donc le calcul immédiat de T après celui de T_1 (§ 2.3 ou 2.4), une fois a_3 fixé. Jusqu'à présent, le choix de a_3 a été empirique, par exemple égal à l'unité. En fait, a_3 varie, en particulier avec la masse volumique du gaz ; des

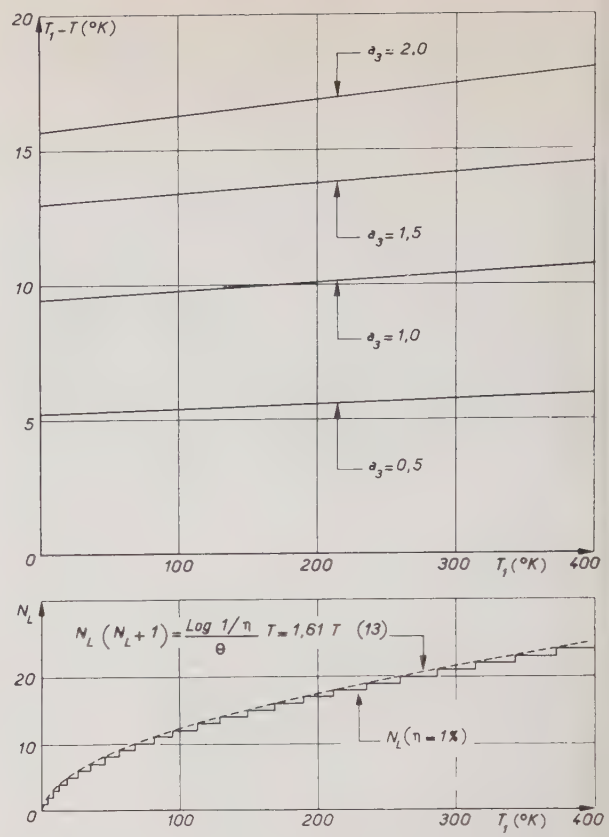


FIG. 15. — Correction en fonction de la température.

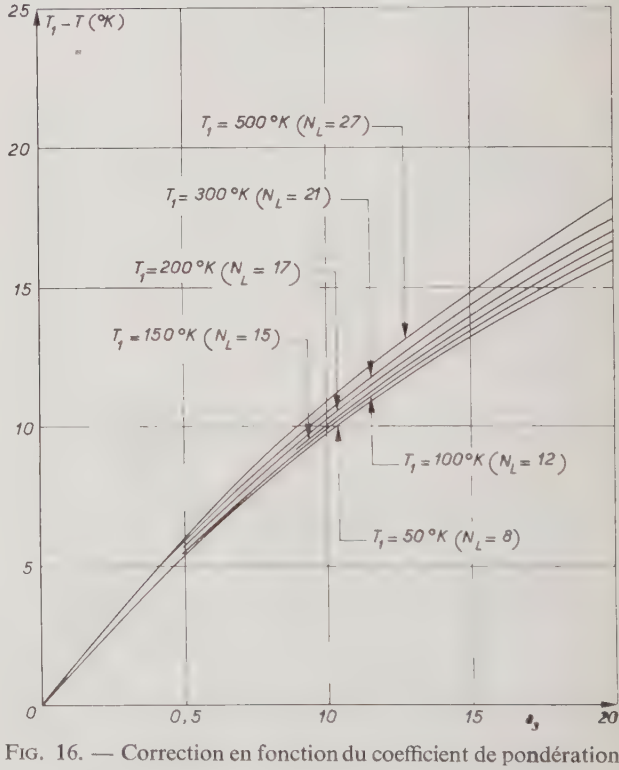


FIG. 16. — Correction en fonction du coefficient de pondération.

essais supplémentaires seraient nécessaires pour connaître cette loi de variation [21], [24] à [27].

Il est finalement possible d'écrire, pour $M \simeq N_L$:

$$T = T_1 - f(T_1, a_3) .$$

D'après la figure 15 :

$$f(T_1, a_3) = \mu_1(a_3) + \mu_2(a_3).T_1$$

avec :

$$\mu_2(a_3) = m_2.\mu_1(a_3) \quad \text{et} \quad m_2 = \text{Cte} \simeq 3 \times 10^{-4}.$$

En fait, les figures 14, 15 et 16 montrent que $f(T_1, a_3)$ varie surtout avec a_3 et très peu avec T_1, ce qui revient à : $\mu_1(a_3) \gg \mu_2(a_3).T_1$. Etant donné le choix arbitraire de a_3 et comme en pratique ce coefficient de pondération reste assez petit et en général inférieur à l'unité, la figure 16 prouve qu'il est valable d'écrire que $\mu_1(a_3) \simeq m_1.a_3$ avec $m_1 \simeq \text{Cte} \simeq 10$ °K. Par suite :

$$T \simeq T_1 - m_1.a_3(1 + m_2.T_1) \simeq$$
$$\simeq T_1 - 10\,a_3(1 + 3 \times 10^{-4}\,T_1)$$

ou

$$\boxed{T \simeq T_1 - m_1\,a_3 \simeq T_1 - 10\,a_3}\,. \qquad (20)$$

C'est le coefficient inconnu unique $m_1.a_3 = 10\,a_3$ qui peut être déterminé en fonction des paramètres dont il dépend, tels que l'intensité du faisceau et surtout la masse volumique. Ce procédé améliore ainsi l'approximation de la relation (20). D'une manière générale, les calculs ci-dessus, ainsi que ceux des paragraphes 2.4 et 3.3, montrent que les diverses méthodes analysées présentent entre elles des écarts de températures pratiquement constants en valeur absolue. Les figures 11 et 12 permettent de vérifier que la différence $T_1 - T$ diminue légèrement avec M, ainsi que le laissait prévoir la figure 14, et que $T_1 - T \simeq 10$ °K pour $M \simeq N_L$ et $a_3 = 1$. En outre, dans la gamme de masses volumiques qui nous concerne (10^{-4} à 10^{-3} kg/m^3), il apparaît que ce coefficient a_3 varie en fait assez peu [21], [30]. C'est d'ailleurs ce qui est implicitement supposé pour les méthodes simples [22], [23].

Finalement, comme la méthode avec $\Delta N \leqslant 3$ donne de bons résultats, l'obtention de la température de rotation est très simple et très rapide par les expressions approchées : en combinant (17) et (20) il vient :

$$\boxed{T = T_0 - 2\,\theta - 10\,a_3} \qquad (21)$$

où $T_0 = \theta/p$ est la température obtenue par la méthode de Boltzmann et $2\,\theta + 10\,a_3 = 16$ °K si $a_3 = 1$. Les figures 17 et 18 sont des exemples de dépouillement manuel de spectres. Le bas de la figure 17 montre en outre la variation de Log λ^4 en fonction de $N'(N'+1)$. Négliger ce terme revient à diminuer p de

$$\delta p = 5 \times 10^{-5}.$$

La valeur de T est donc surestimée de $\delta T/T = -\delta p/p$ soit à température ambiante : $\delta T/T = 5 \times 10^{-3}$ et à basse température (60 °K) : $\delta T/T = 10^{-3}$. Finalement $\delta T = -T^2.\delta p/\theta \simeq 1{,}5$ et 0,06 °K respectivement, ce qui est inférieur à l'incertitude des résultats. Ceci justifie donc la remarque à la fin du paragraphe 2.2. Pour nos conditions expérimentales, la température trouvée par la méthode de Boltzmann diminuée de 16 °K est en bon accord avec les valeurs exactes.

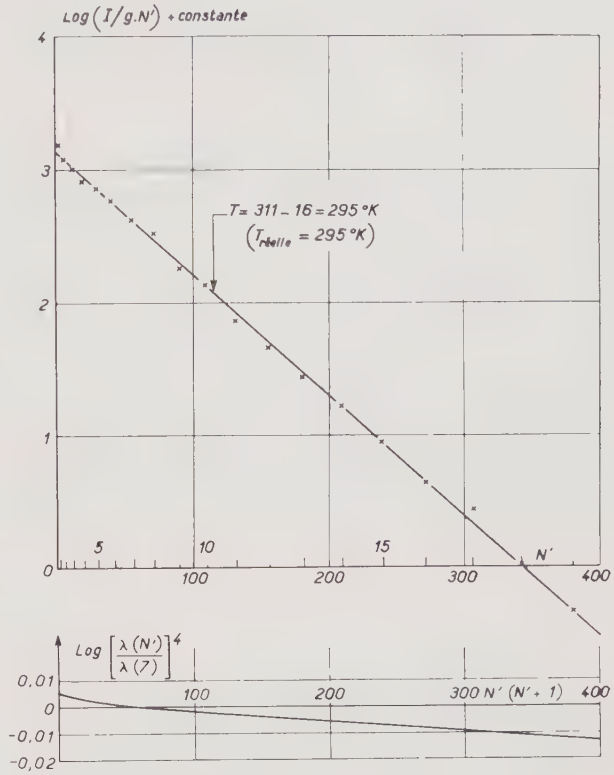


FIG. 17. — Analyse simplifiée d'un spectre à température ambiante.

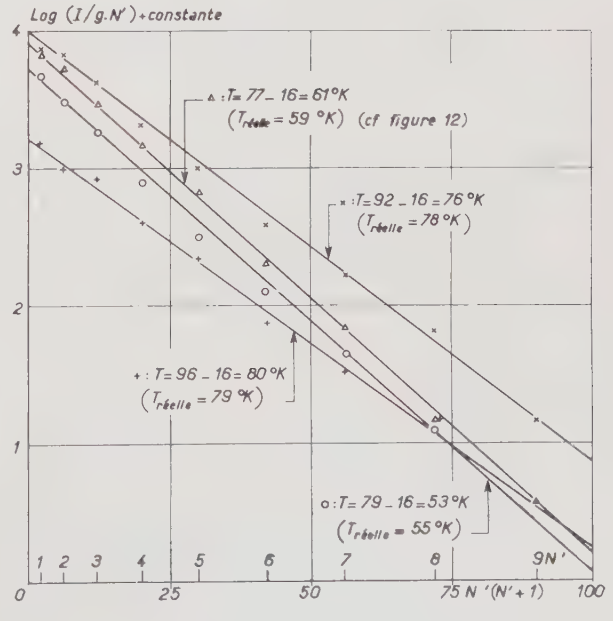


FIG. 18. — Analyse simplifiée de spectres à basse température.

Conclusion. — Dans un gaz en écoulement, la température locale de rotation peut être déterminée à partir de la mesure des intensités relatives des raies du spectre excité par un faisceau d'électrons. Muntz a décrit le processus d'excitation et d'émission dû aux électrons primaires et en a déduit une première méthode de calcul. Celle-ci peut être remplacée, sans introduction d'erreurs supplémentaires, par la méthode de Boltzmann plus simple, non itérative et n'imposant pas le calcul d'une fonction d'excitation relativement compliquée, à condition de retrancher 6 °K au résultat trouvé.

Cependant, dès les premières applications, il est apparu que le modèle de Muntz donne des températures trop élevées. Différentes méthodes, tenant compte des électrons secondaires, ont alors été proposées. Un programme de calcul mis au point à l'ONERA permet de comparer les résultats ainsi obtenus. Un nouveau modèle, incluant les transitions d'excitation $\Delta N \leqslant 3$ et s'inspirant des précédents, est suggéré. Il semble fournir des températures en bon accord avec la réalité et a l'avantage d'être aisé à appliquer. Il a été montré en outre que la température calculée par ce modèle est égale à celle de Muntz, diminuée de dix fois le coefficient de pondération dû aux électrons secondaires.

Jusqu'à présent, ce coefficient a été choisi *a priori*. Une valeur égale à l'unité convient bien pour nos conditions expérimentales. Il varie d'ailleurs peu dans la gamme de masses volumiques qui nous intéresse. Naturellement, la mesure, même approximative, de la masse volumique, en même temps que l'enregistrement des spectres, serait nécessaire pour l'application des méthodes les plus élaborées qui existent actuellement, ou même de celle présentée ici, si le coefficient de pondération est pris fonction de la masse volumique.

Quoi qu'il en soit, la méthode exposée paraît bien convenir puisque le même coefficient de pondération est utilisable sur toute la gamme de températures explorée quand toutes les autres conditions expérimentales restent les mêmes. Finalement la température de rotation se détermine très facilement : il suffit encore d'appliquer la méthode de Boltzmann et de retrancher une correction indépendante de la température cherchée. Une construction graphique simple ou une application rapide de la méthode des moindres carrés fournit donc le résultat. Ce processus de calcul présente un intérêt réel pour l'exploitation de cette technique de sondage, en aérodynamique en particulier, puisque l'analyse des spectres, jusqu'à présent assez laborieuse, devient ainsi très aisée.

Bibliographie

[1] Schumacher (B. W.), and Gadamer (E. O.), *Can. J. Phys.*, 1958, **36,** 659.

[2] Grun (A. E.), *Can. J. Phys.*, 1958, **36,** 858.

[3] Muntz (E. P.), *The Physics of Fluids*, 1962, **5,** 80.

[4] Muntz (E. P.) and Marsden (D. J.), « Electron excitation applied to the experimental investigagation of rarefied gas flows », Rarefied Gas Dynamics, Third Symposium, Academic Press, 1963, **2,** p. 495.

[5] Muntz (E. P.), « The Electron Beam Fluorescence Technique », AGARDograph 132, NATO-AGARD Fluid Dynamics Panel, 1968.

[6] Juillerat (R.), La Recherche Aérospatiale, 1970, n° 1970-1, 53.

[7] Lewy (S.), La Recherche Aérospatiale, 1970, n° 1970-3, 155.

[8] Lewy (S.), « Density Measurement in Aerodynamic Flows by an Electron Beam Probe ». 4th International Congress on Instrumentation in Aerospace Simulation Facilities, ICIASF'71 Record, IEEE Publication 71-C-33 AES, 1971, 125.

[9] Lewy (S.), « Mesure de températures par la sonde à faisceau d'électrons », *J. Physique*, 1971, **32, C 5** 48.

[10] Kieffer (L. J.) and Dunn (G. H.), *Rev. Mod. Phys.* 1966, **38,** 1.

[11] Mott (N. F.) and Massey (H. S. W.), « The Theory of Atomic Collisions », Third Edition, Oxford, Clarendon Press, 1965.

[12] Schumacher (B. W.), Aruja (E.) and Falckenberg (H. R.), « The electron-single scatter gauge. A new vacuum gauge for the range from 10^{-5} torr to 1 torr », The Proceedings of the 1965 Transactions of the third International Vacuum Congress, Pergamon Press, 1966, **2,** 543.

[13] Khare (S. P.), *J. Phys. B, Atomic and Molecular Physics*, 1970, **3,** 971.

[14] Berger (M. J.) and Seltzer (S. M.), « Tables of Energy Losses and Ranges of electrons and Positrons », Studies in penetration of charged particles in matter, National Academy of Sciences, National Research Council, Publication 1133, Nuclear Science Series, Report n° 39, Paper 10 1964, 1967, 205.

[15] Cohn (A.), and Caledonia (G.), *J. Appl. Physics.*, 1970, **41,** 3767.

[16] Espe (W.), « Werkstoffkunde der Hochvakuum Technik », Deutscher Verlag der Wissenschaften, Band 1, 1959.

[17] Herzberg (G.), « Molecular Spectra and Molecular Structure, I. Spectra of Diatomic Molecules », D. van Nostrand Company, Inc., 1950.

[18] Penner (S. S.), « Quantitative molecular spectroscopy and gas emissivities », Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1959.

[19] Robben (F.), and Talbot (L.), *Phys. Fluids*, 1966, **9,** 644.

[20] Ashkenas (H.), *Phys. Fluids*, 1967, **10,** 2509.

[21] Lillicrap (D. C.) and Harvey (J. K.), *AIAA Journal*, 1969, **7,** 980.

[22] Hickman (R. S.), « Rotational Temperature Measurements in Nitrogen Using an Electron Beam », University of Southern California, Aerospace Engineering Report USCAE 104, Los Angeles, California, September 1966.

[23] Williams (W. D.), « Laboratory Verification Studies of Rotational and Vibrational Temperature Measurements by the Electron Beam Technique », Arnold Engineering Development Center, AEDC-TR-68-265, Arnold Air Force Station, Tennessee, February 1969.

[24] SMITH (R. B.), « N_2 First Negative Band Broadening due to Electron Beam Excitation », Rarefied Gas Dynamics, Sixth Symposium, Academic Press, 1969, **2,** 1749.

[25] MAGUIRE (B. L.), « Density Effects on Rotational Temperature Measurements in Nitrogen using the Electron Beam Excitation Technique », Rarefied Gas Dynamics, Sixth Symposium, Academic Press, 1969, **2,** 1761.

[26] LENGRAND (J. C.) et CLOUPEAU (M.), *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 1971, **272A,** 635.

[27] CLOUPEAU (M.), GAUCHEREL (P.) et LENGRAND (J. C.), « Application des sondes à faisceau électronique aux mesures locales des concentrations et des températures », *J. Physique*, 1971, **32,** C 5-54.

[28] SICHEL (J. M.), *Mol. Phys.*, 1970, **18,** 95.

[29] DIXON (R. N.), DUXBURY (G.), HORANI (M.) and ROSTAS (J.), *Mol. Phys.*, 1971, **22,** 977.

[30] LILLICRAP (D. C.). « Experimental Determination of Density and Rotational Temperature by an Improved Electron Beam Technique », AIAA 4th Fluid and Plasma Dynamics Conference, AIAA Paper No. 71-605, June 21-23, 1971.